Adam Smith, John Nash, il prezzo dell'anarchia e la decadenza della società moderna

Vittorio Bilò *Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento*

È idea diffusa tra numerosi studiosi di antropologia che la civiltà occidentale abbia oramai imboccato la strada senza ritorno del declino. Tra le varie cause individuate, spiccano l'eccessivo individualismo, l'indebolimento della fibra morale, la spettacolarizzazione dell'apparenza e dell'immagine a scapito dell'intelletto e della cultura. In questo articolo, proponiamo un'interpretazione socio-economica di questo fenomeno attraverso l'analisi di alcuni risultati teorici recentemente dimostrati nell'ambito della Teoria dei Giochi Algoritmica: una disciplina scientifica che si colloca all'intersezione tra la Teoria dei Giochi e l'Informatica Teorica.

Il mondo sta andando a rotoli. Chissà quanti di voi avranno pronunciato, specie negli ultimi tempi e in maniera più o meno convinta, queste parole! A chi scrive, perlomeno, capita di farlo molto spesso e cioè ogni qualvolta si ritrovi a dover fronteggiare l'ennesima manifestazione di decadenza morale e culturale che oramai permea irrimediabilmente la nostra società.

"Che sia una nuova, e più subdola, manifestazione del processo darwiniano di selezione naturale?". Intendo dire: "Ci stiamo, forse, inconsapevolmente trasformando negli individui più adatti a sopravvivere sul pianeta Terra del terzo millennio?".

Con ogni probabilità sto traendo delle conclusioni assurde o, giudicate con più indulgenza, semplicemente simpatiche. Tuttavia, esse risultano in maniera del tutto naturale da alcuni risultati analitici dimostrati negli ultimi anni nell'ambito della Teoria dei Giochi Algoritmica: una giovane area scientifica che si colloca all'intersezione tra la Teoria dei Giochi e l'Informatica Teorica. E, seguendo quello "spirito di simpatia" che dovrebbe caratterizzare ogni rivista di divulgazione scientifica che si rivolga a un pubblico ampio ed eterogeneo, cercherò di spiegare perché le conclusioni raggiunte dal filosofo scozzese Adam Smith nella sua teoria della "mano invisibile", opportunamente rinquadrate in un ambiente di applicazione più appropriato, possano ritenersi corrette e, soprattutto, indicative di un livello di degrado sociale che, pur già preoccupante di per sé, risulta persino meno scoraggiante di quello che potrebbe rivelarsi essere nella realtà.

Adam Smith e il comportamento egoista

Adam Smith, filosofo scozzese del XVIII secolo, è universalmente ritenuto il padre della moderna Economia Politica e, in particolare, del Liberismo economico. Egli, infatti, da fiero sostenitore del libero mercato, asseriva che l'imposizione di una qualsiasi regolamentazione sull'attività dei singoli finisse con l'arrecare nocumento al fermento economico di una comunità, frenandone a tutti gli effetti la crescita, senza, per questo, apportarle alcun beneficio di rimando. A suggello del suo pensiero, egli elaborò il seguente postulato, noto col nome di **teoria della mano invisibile**:

> *Nel libero mercato, se ogni individuo si adopera per massimizzare il proprio tornaconto economico, allora anche il benessere di tutta la collettività risulta massimizzato.*

Tralasciando la visione machiavelliana, del fine che giustifica i mezzi, sulle modalità con le quali si possa operare al fine di massimizzare il proprio tornaconto, risulta subito lampante come la chimera del benessere collettivo venga degradata al ruolo di propulsore ed esaltatore del comportamento egoista degli individui, il tutto a scapito di ogni forma di sviluppo basata sulla collaborazione e sul mutuo sostegno tra le parti.

All'inizio del XX secolo, l'economista francese Léon Walras fornì una prova formale del postulato della mano invisibile dimostrando che, in condizioni di *concorrenza perfetta*, è possibile determinare un sistema di prezzi d'equilibrio che comporta l'eguaglianza tra domanda e offerta in tutti i mercati, nonché l'eguaglianza tra costo di produzione e prezzo di vendita per ciascun bene e per ciascun imprenditore.

Che il postulato proposto da Smith, poi, fosse vero o, in qualche forma, approssimativamente vero anche al di fuori del contesto del libero mercato in regime di concorrenza perfetta non era facile da stabilire a quei tempi, data la mancanza di un'appropriata teoria matematica in grado di modellare e predire il comportamento strategico di soggetti razionali portatori di interessi socio-economici eterogenei. Soltanto nel secondo dopo guerra, la nascita della Teoria dei Giochi avrebbe posto le basi per lo studio analitico di tali situazioni.

La teoria dei giochi e l'equilibrio di Nash

Quali saranno i percorsi scelti dagli abitanti di una città per recarsi al lavoro? In quale punto strategico conviene installare una nuova base militare? Qual è la maniera più remunerativa per vendere un bene a un'asta pubblica? Questi sono soltanto alcuni dei tanti problemi studiati nel tempo attraverso la Teoria dei Giochi. Essa nacque nel 1944, con la pubblicazione del libro "*Theory of Games and Economic Behavior*" di John von Neumann e Oscar Morgestern, allo scopo di modellare situazioni in cui dei soggetti razionali (detti, per l'appunto, **giocatori**) si trovano a dover prendere delle decisioni strategiche e il risultato conseguito da ognuno di loro dipende sia dalla propria scelta che da quelle effettuate dagli altri. La teoria così sviluppata si limitava, tuttavia, a considerare situazioni in cui i giocatori potevano coordinare le proprie scelte al fine di ottenere risultati migliori: i cosiddetti *giochi cooperativi*.

Fu John F. Nash a introdurre, alla fine degli anni '40, la nozione di *gioco non cooperativo* [1], nel quale ogni giocatore agisce egoisticamente al solo scopo di ottenere il risultato migliore possibile per se stesso, senza comunicare, né tantomeno cooperare con nessun altro giocatore, o gruppi di giocatori. Inizialmente, le idee di Nash furono snobbate dallo stesso von Neumann, il quale riteneva che il futuro della Teoria dei Giochi si sarebbe basato sui giochi cooperativi, ma con il passare degli anni l'attenzione del mondo economico si riversò sempre più sullo studio della variante proposta da Nash, tant'è che nel 1994 egli venne insignito del premio Nobel per l'economia per la sua "analisi pionieristica degli equilibri nella teoria dei giochi non cooperativi".

Secondo la visione di Nash, che può essere a tutti gli effetti riconosciuta come un'estensione di quella teorizzata da Smith, il comportamento di un giocatore è modellato sulla base di tre ipotesi fondamentali:

1. **egoismo:** il giocatore ha come unico obiettivo l'ottimizzazione del proprio tornaconto personale (massimizzazione dei propri profitti o minimizzazione dei propri costi) e non si preoccupa del fatto che il suo comportamento possa andare a scapito degli altri soggetti che partecipano al gioco;

2. **razionalità:** il giocatore, nel perseguire il proprio obiettivo, si comporta in maniera logica e intelligente, effettuando sempre le scelte più ragionevoli;

3. **non cooperativismo**: il giocatore, nel perseguire il proprio obiettivo, non può creare accordi né coalizioni con altri soggetti che partecipano al gioco.

È chiaro che l'ipotesi di razionalità non possa ammettere una formalizzazione rigorosa e che la sua interpretazione debba essere demandata, di volta in volta, all'intuizione del momento.

Formalmente, un gioco non cooperativo (in *forma strategica*) è definito come segue.

Definizione 1. *Un* **gioco non cooperativo** *in forma strategica è una tripla* $\mathsf{SG} = \big([n], \Sigma_{i\in[n]}, \mathsf{U}_{i\in[n]}\big)$, *dove* $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ *è l'insieme dei giocatori e, per ogni* $i \in [n]$, Σ_i *è l'insieme delle scelte strategiche a disposizione del giocatore* i *e* $\mathsf{U}_i : \times_{i\in[n]}\Sigma_i \to \mathbb{R}$ *è la sua funzione di utilità.*

Chiamiamo **insieme dei profili strategici** l'insieme $\boldsymbol{\Sigma} = \times_{i\in[n]}\Sigma_i$ e, analogamente, chiamiamo **profilo strategico** un qualsiasi elemento $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}$. Intuitivamente, un profilo strategico è il risultato che si ottiene quando ogni giocatore ha effettuato una scelta strategica. Ad esempio, scriveremo $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ per modellare la situazione in cui ogni giocatore $i \in [n]$ ha scelto la strategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ dando vita al profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$. Com'è possibile vedere, la definizione delle U_i, essendo dipendente da $\boldsymbol{\Sigma}$, fa sì che l'utilità ottenuta dal giocatore i nel profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$, ossia il valore $\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma})$, non dipenda soltanto dalla sua scelta strategica, ma anche da quelle effettuate dagli altri. Assumeremo implicitamente che ogni giocatore cercherà di minimizzare la propria utilità, intesa quindi, d'ora in avanti, come misura di un costo che ognuno deve inevitabilmente sostenere.

Una volta stabilite quelle che sono le variabili in gioco (il modo di dire è decisamente appropriato in questo contesto), siamo interessati a predire, in maniera più o meno esatta, il comportamento che verrà tenuto da ognuno dei giocatori.

Siano dati un profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$ e una strategia $\tau \in \Sigma_i$ per il giocatore i. Con la notazione $\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau$ indichiamo il profilo strategico $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \tau, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ ottenuto da $\boldsymbol{\sigma}$ per effetto del cambiamento di strategia da σ_i a τ da parte del giocatore i. Si noti come il profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau$ differisca da $\boldsymbol{\sigma}$ solo per la scelta di tale giocatore.

Definizione 2. *Dato un profilo strategico* $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}$, *la strategia* $\tau \in \Sigma_i$ *è una* **mossa migliorativa** *per il giocatore* i *in* $\boldsymbol{\sigma}$ *se* $\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau) < \mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma})$.

Una mossa migliorativa è, quindi, un cambio di strategia che porta un beneficio al giocatore che la effettua.

Siano dati ora un profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$ e una mossa migliorativa τ per il giocatore i in $\boldsymbol{\sigma}$. Sulla base delle ipotesi fatte sulla natura dei giocatori, diventa naturale aspettarsi che il profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$ non sarà mai un risultato plausibile del gioco in quanto il giocatore i vorrà sempre cambiare la propria scelta da σ_i a τ e migliorare la propria situazione. Su questa semplice osservazione si basa la definizione di Equilibrio di Nash in strategie pure che è uno dei concetti che meglio di tutti incarnano la nozione di soluzione di un gioco non cooperativo.

Definizione 3. *Il profilo strategico* $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}$ *è un* **Equilibrio di Nash in strategie pure** *se per ogni* $i \in [n]$ *e per ogni* $\tau \in \Sigma_i$, *vale* $\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau) \geq \mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma})$.

Un Equilibrio di Nash in strategie pure è quindi un profilo strategico in cui nessun giocatore possiede una mossa migliorativa.

Un altro concetto fondamentale, fortemente legato a quello di mossa migliorativa, è la nozione di *contromossa migliore*. Il modo più semplice per illustrare questo concetto lo si ottiene pensando che il gioco si svolga a turni (come per i giochi da tavolo in genere) e che, a ogni turno, un giocatore decida se e come cambiare la propria scelta strategica. Ovviamente, ci aspettiamo che il giocatore modificherà la propria scelta se si trova in un profilo strategico per il quale possiede una mossa migliorativa, ma come si comporterà quando le mosse migliorative a sua disposizione sono più di una? L'ipotesi di razionalità ci porta a pensare che egli vorrà effettuare la scelta che gli dia il massimo beneficio nell'immediato, ossia scegliere la mossa migliorativa che gli consenta di migliorare la propria utilità il più possibile (in questo caso si dice che il giocatore è **miope**). Formalmente, possiamo enunciare la seguente definizione.

Definizione 4. *Sia dato un profilo strategico* $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\Sigma}$. *Una strategia* $\tau \in \Sigma_i$ *è una* **contromossa migliore** *per il giocatore* i *in* $\boldsymbol{\sigma}$ *se* $\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau) = \min_{\tau' \in \Sigma_i} \left\{ \mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i} \diamond \tau') \right\}$.

A volte si è tentati di pensare che una contromossa migliore per il giocatore i in $\boldsymbol{\sigma}$ sia la migliore tra le sue mosse migliorative in $\boldsymbol{\sigma}$. Questo, tuttavia, risulta vero solo quando l'insieme delle mosse migliorative a disposizione del giocatore i in $\boldsymbol{\sigma}$ è non vuoto. Infatti, quando il giocatore i non ha mosse migliorative in $\boldsymbol{\sigma}$, questo erroneo presupposto ci porterebbe a dire che egli non ha una contromossa migliore in $\boldsymbol{\sigma}$ (l'insieme vuoto non ha elementi), mentre la strategia σ_i da egli correntemente adottata in $\boldsymbol{\sigma}$ costituisce una contromossa migliore sulla base della Definizione 4. Non è difficile vedere che un profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$ è un Equilibrio di Nash in strategie pure se, per ogni $i \in [n]$, la strategia σ_i è una contromossa migliore per il giocatore i in $\boldsymbol{\sigma}$.

L'Equilibrio di Nash in strategie pure è un concetto tanto semplice quanto efficace per caratterizzare quelli che possono essere ritenuti comportamenti plausibili con le ipotesi di egoismo, razionalità e non cooperativismo dei giocatori. Tuttavia, esso non gode di alcune di quelle proprietà fondamentali, quali *esistenza* e *unicità*, che, di solito, ci si attende dal concetto di soluzione di un dato problema.

Nash risolse la questione dell'esistenza di soluzioni all'equilibrio dando ai giocatori la possibilità di utilizzare strategie probabilistiche (dette *strategie miste*) e dimostrando che, sotto queste nuove ipotesi, ogni gioco finito (ossia con un numero finito di giocatori e un numero finito di strategie per giocatore) ammette sempre almeno un *Equilibrio di Nash in strategie miste* [2].

L'Equilibrio di Nash in strategie miste, pur essendo ormai universalmente riconosciuto e utilizzato come concetto standard di soluzione per i giochi non cooperativi, è stato da sempre oggetto di forti critiche, sia per il fatto di assumere strategie probabilistiche, sia perché esso richiede che ogni giocatore possegga un'informazione completa su tutte le possibili strategie a disposizione degli altri partecipanti al gioco. Per questi motivi, l'Equilibrio di Nash in strategie pure, che non necessita di alcuna di queste assunzioni, è il concetto di soluzione da preferirsi in tutte le situazioni in cui esso esiste.

Concludiamo questa sezione illustrando i concetti appena introdotti attraverso quello che, con ogni probabilità, risulta essere l'esempio più famoso di gioco non cooperativo: il *Dilemma del Prigioniero*.

Esempio 1. *La polizia ha arrestato due noti pregiudicati fortemente sospettati di aver commesso un omicidio. Gli inquirenti hanno prove schiaccianti per farli condannare per traffico di stupefacenti, ma non hanno abbastanza prove per ottenere una condanna per omicidio, a meno che uno dei due non tradisca l'altro confessando il reato commesso. Per questi motivi, gli investigatori propongono a ognuno dei due sospettati (che sono tenuti in celle separate e, quindi, non possono fare patti preventivi) lo stesso tipo di accordo. Nel caso in cui uno solo dei due confessasse, egli otterrebbe un sensibile sconto di pena, venendo condannato a un solo anno di carcere, mentre all'altro ne toccherebbero venti. Tuttavia, se entrambi confessassero, lo sconto sarebbe molto più modesto, così che entrambi finirebbero con lo scontare quindici anni di prigione. Infine, nel caso in cui nessuno dei due parlasse, essi verrebbero condannati a due anni di carcere per traffico di stupefacenti.*

La rappresentazione grafica del gioco in questione è riportata nella Figura 1.

Dall'analisi delle utilità riportate in figura, è possibile notare come nel profilo strategico $(Tace, Confessa)$ il primo giocatore disponga di una mossa migliorativa: la strategia di confessare. In questo caso, infatti, la sua utilità scende da 20 a 15, anche se ciò comporta un peggioramento dell'utilità del secondo giocatore che passa da 1 a 15. Tale strategia, essendo l'unica mossa miglio-

	Tace	Confessa
Tace	(2,2)	(20,1)
Confessa	(1,20)	(15,15)

Figura 1: *Rappresentazione grafica del gioco del Dilemma del Prigioniero.*

rativa per il primo giocatore, costituisce anche una contromossa migliore. Il secondo giocatore, invece, non possiede alcuna mossa migliorativa, ma possiede, ovviamente, una contromossa migliore, ossia la strategia di confessare che è quella da lui correntemente utilizzata. Infine, il profilo strategico $(Confessa, Confessa)$ costituisce l'unico Equilibrio di Nash in strategie pure del gioco.

È interessante notare (e in questo risiede la significatività di questo gioco) come il profilo strategico $(Tace, Tace)$, che costa a entrambi i giocatori soltanto 2 anni di prigione, sia di gran lunga migliore di quello all'equilibrio. Tuttavia, le ipotesi di egoismo e razionalità non rendono possibile il raggiungimento di una simile situazione ideale. Infatti, anche se i due sospettati si accordassero preventivamente sul comportamento da tenere (possibilità che abbiamo escluso a priori in quanto in presenza di giocatori non cooperativi e che richiederebbe comunque che essi siano informati delle condizioni proposte prima di essere separati), l'idea di evitare un anno di prigione porterebbe comunque ognuno di loro a tradire la parola data.

Il prezzo dell'anarchia

Come abbiamo visto alla fine della sezione precedente, il concetto di inefficienza delle soluzioni all'equilibrio rispetto a soluzioni idealmente ottimali, ma che non sono realizzabili in pratica poiché in contrasto con le ipotesi di egoismo, razionalità e non cooperativismo dei giocatori, risulta noto sin dai tempi dell'introduzione del gioco del Dilemma del Prigioniero: nella soluzione all'equilibrio i due prigionieri finiscono con lo scontare molti più anni di carcere di quelli che avrebbero fatto se si fossero accordati sulla strategia comune di non confessare il loro reato. Ritornando indietro alla visione della mano invisibile di Adam Smith, in questo caso siamo in presenza di una situazione in cui il comportamento egoista dei giocatori non porta alla massimizzazione del loro benessere.

Gli economisti hanno da sempre accettato questa situazione come un dato di fatto, senza porsi ulteriori domande, in particolare sull'entità di tale inefficienza nei vari giochi, specie in quelli che modellano situazioni di comportamento reale. È stato a seguito dell'interessamento alla Teoria dei Giochi da parte della comunità scientifica degli informatici, da sempre preoccupati delle prestazioni dei sistemi utilizzati nella pratica, che il problema di quantificare la distanza tra le soluzioni all'equilibrio e quelle ottimali che si possono ottenere rilassando le ipotesi di egoismo, razionalità e non cooperativismo dei giocatori è diventato oggetto di studio sistematico.

Dato un gioco non cooperativo SG, una **funzione sociale** per SG è una funzione $\mathsf{SF} : \mathbf{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni profilo strategico $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{\Sigma}$ un valore $\mathsf{SF}(\boldsymbol{\sigma})$, detto **valore sociale** di $\boldsymbol{\sigma}$, che esprime il grado di soddisfazione percepito dall'insieme dei giocatori in $\boldsymbol{\sigma}$. La funzione sociale più naturale per esprimere il benessere raggiunto dalla collettività dei giocatori è la funzione $\mathsf{SUM}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{i \in [n]} \mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma})$, ossia la somma delle utilità realizzate da tutti i giocatori nel profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$: tanto più basso sarà questo valore, tanto più alto sarà il benessere sociale della collettività.

Dato un gioco non cooperativo SG, detti $\mathsf{PNE}(\mathsf{SG})$ l'insieme degli Equilibri di Nash in strategie pure di SG e $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathsf{SG})$ il profilo strategico che minimizza la funzione sociale SUM, si definisce **prezzo dell'anarchia** (PoA) di SG il rapporto tra il valore sociale del peggior Equilibrio di Nash in strategie pure e il valore sociale dell'ottimo [3], ossia

$$\mathsf{PoA}(\mathsf{SG}) = \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathsf{PNE}(\mathsf{SG})} \left\{ \frac{\mathsf{SUM}(\boldsymbol{\sigma})}{\mathsf{SUM}(\boldsymbol{\sigma}^*(\mathsf{SG}))} \right\}$$

Il prezzo dell'anarchia quantifica, quindi, la massima perdita in efficienza che i giocatori *possono* subire a causa del loro comportamento egoista: più esso cresce e più il benessere sociale garantito dalla peggior soluzione all'equilibrio diminuisce. Tale nozione si estende naturalmente a un'intera classe di giochi considerando il caso peggiore su tutte le possibili istanze della classe. Data una classe di giochi $\mathcal{C}$, definiamo

$$\mathsf{PoA}(\mathcal{C}) = \sup_{\mathsf{SG}\in\mathcal{C}} \{\mathsf{PoA}(\mathsf{SG})\}$$

I giochi di congestione

Introduciamo, in questa sezione, una classe di giochi molto studiata in pratica: la classe dei giochi di congestione.

Definizione 5. *Un* **gioco di congestione** *è una quadrupla* $\mathsf{SG} = \left([n], R, \Sigma_{i\in[n]}, \ell_{j\in R}\right)$*, dove* $[n]$ *è l'insieme dei giocatori,* R *è un insieme di risorse, e l'insieme delle scelte strategiche a disposizione di ogni giocatore* i *è un qualsiasi sottoinsieme non vuoto dell'insieme delle parti di* R*, ossia* $\Sigma_i \subseteq \mathcal{P}(R) \setminus \emptyset$*. Dato un profilo strategico* $\boldsymbol{\sigma}$*, definiamo* **congestione** *della risorsa* r_j *in* $\boldsymbol{\sigma}$*, e lo indichiamo con* $n_j(\boldsymbol{\sigma})$*, il numero di giocatori che utilizzano* r_j *quando* $\boldsymbol{\sigma}$ *viene realizzato. Formalmente,* $n_j(\boldsymbol{\sigma}) = |\{i \in [n] : r_j \in \sigma_i\}|$*. Ogni risorsa* $r_j \in R$ *ha una* **funzione di costo** $\ell_j : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *che dipende esclusivamente dalla propria congestione. L'utilità realizzata dal giocatore* i *in* $\boldsymbol{\sigma}$ *è definita come* $\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{r_j\in\sigma_i} \ell_j(n_j(\boldsymbol{\sigma}))$*.*

I giochi di congestione costituiscono una classe di giochi molto importante e molto studiata in letteratura grazie al fatto che essi ammettono sempre Equilibri di Nash in strategie pure [4].

Andremo, ora, a illustrare tre risultati teorici, decisamente sorprendenti e controintuitivi, che si manifestano nelle seguenti sottoclassi dei giochi di congestione:

- **giochi di congestione lineari**,
- **giochi di condivisione dei costi su reti di comunicazione multicasting** (ai quali ci riferiremo d'ora in avanti come *giochi multicast*),
- **giochi di taglio**.

Giocatori altruisti nei giochi di congestione lineari

I giochi di congestione lineari corrispondono alla sottoclasse dei giochi di congestione in cui, per ogni risorsa $r_j \in R$, la funzione di costo ℓ_j risulta essere lineare nella sua congestione. È stato dimostrato in [5] che il prezzo dell'anarchia di questa classe di giochi è uguale a $5/2$, il che vuol dire che ogni possibile soluzione all'equilibrio generata da giocatori egoisti risulta avere un grado di benessere collettivo pari almeno al 40% di quello ottimo. Una domanda che nasce spontanea, quindi, è quella di capire se giocatori maggiormente altruistici e cooperativi, che abbiano un occhio di riguardo anche al benessere collettivo oltre che al proprio tornaconto personale, possano produrre equilibri migliori abbassando ulteriormente il prezzo dell'anarchia.

Diciamo che il giocatore $i \in [n]$ è γ-altruista, con $\gamma \in [0,1]$, se è interessato a minimizzare la seguente funzione di utilità:

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \gamma &\sum_{k\in[n]:k\neq i} \sum_{r_j\in\sigma_k} \ell_j(n_j(\boldsymbol{\sigma})) \\ &+(1-\gamma)\sum_{r_j\in\sigma_i} \ell_j(n_j(\boldsymbol{\sigma}))\end{aligned}$$

Sulla base di tale definizione, un giocatore γ-altruista vorrà minimizzare una combinazione lineare tra il suo costo personale e quello sostenuto da tutti gli altri giocatori. In questa maniera, un giocatore 0-altruista è un classico giocatore egoista, mentre un giocatore 1-altruista è un giocatore puramente altruista che si adopera soltanto per migliorare il benessere degli altri senza prendere in considerazione il proprio costo personale.

È stato dimostrato in [6] che il prezzo dell'anarchia nei giochi di congestione lineari con giocatori γ-altruisti è uguale a $\frac{5-\gamma}{2-\gamma}$ per $\gamma \in [0, 1/2]$ e $\frac{2-\gamma}{1-\gamma}$ per $\gamma \in [1/2, 1]$. Com'è possibile notare, quindi, il prezzo dell'anarchia cresce dal valore $5/2$ al valore 3 per γ che cresce da 0 a $1/2$, per poi iniziare ad aumentare in maniera molto più marcata fino a tendere verso l'infinito per γ che tende a 1. Ne consegue che la situazione che produce equilibri aventi il miglior grado di benessere sociale nel caso peggiore è quella in cui i giocatori sono puramente egoisti. Abbiamo, quindi, scoperto un nuovo contesto applicativo in cui la teoria della mano invisibile di Adam Smith trova una giustificazione analitica.

Giocatori ignoranti nei giochi *multicast*

I giochi *multicast* sono una sottoclasse dei giochi di congestione che modellano la creazione spontanea di reti di comunicazione. Esiste un nodo speciale nella rete, detto sorgente, che possiede un'informazione appetita dai vari giocatori (ad esempio, un film, un concerto, un aggiornamento software). Ogni giocatore vuole connettersi alla sorgente, in modo da ricevere l'informazione desiderata, attraverso un insieme di link trasmissivi che possono essere instaurati a un certo costo. Quando uno stesso link risulta condiviso da più giocatori, il suo costo viene ripartito equamente tra ognuno di essi.

Il prezzo dell'anarchia di questa classe di giochi è molto alto, essendo pari al numero di giocatori n. Ci chiediamo nuovamente se sussiste la possibilità di ottenere equilibri migliori cambiando leggermente la natura dei giocatori. In questo caso, ci concentreremo sul grado di conoscenza posseduta da ognuno di loro nella seguente maniera: associamo, a ogni giocatore $i \in [n]$, l'insieme $K_i \subseteq [n]$ di tutti i giocatori dei quali i conosce la scelta strategica effettuata. Il giocatore i, non disponendo di una conoscenza completa del profilo strategico $\boldsymbol{\sigma}$ in cui si viene a trovare, non è più in grado di valutare correttamente la congestione $n_e(\boldsymbol{\sigma})$ per ogni arco $e \in E$, ma ne potrà stimare soltanto un valore approssimato $n_e^i(\boldsymbol{\sigma}) \leq n_e(\boldsymbol{\sigma})$. In questo contesto, la sua utilità in $\boldsymbol{\sigma}$ verrà, quindi, ridefinita come

$$\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{e \in \sigma_i} \ell_j(n_e^i(\boldsymbol{\sigma}))$$

È stato dimostrato in [7] che, se ogni giocatore $i \in [n]$ conosce soltanto le scelte strategiche effettuate dall'insieme dei giocatori $K_i = \{1, \ldots, i\}$, allora il prezzo dell'anarchia scende a $O(\log^2 n)$, mostrando come il benessere sociale aumenti di un fattore esponenziale in presenza di giocatori ignoranti.

Giocatori lungimiranti nei giochi di taglio

I giochi di taglio, infine, sono una sottoclasse dei giochi di congestione che possono essere definiti attraverso la seguente, semplice, metafora politica. Ogni giocatore $i \in [n]$ deve decidere se schierarsi col partito di destra o con quello di sinistra. Per ogni coppia di giocatori $i, j \in [n]$, il valore c_{ij} quantifica l'insoddisfazione che i e j provano quando vengono a trovarsi nello stesso partito (possiamo pensare al valore c_{ij} come al livello di rivalità politica che intercorre tra i due giocatori). La funzione di utilità del giocatore i è dunque definita come

$$\mathsf{U}_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j \in [n] : \sigma_j = \sigma_i} c_{ij}$$

ossia, ogni giocatore vuole stare nel partito (non importa se di destra o di sinistra) in cui incontra il minor livello di rivalità politica.

Piuttosto che considerare gli Equilibri di Nash in strategie pure per questo gioco, prendiamo in esame le soluzioni che si generano nella seguente maniera: a partire dalla situazione in cui nessuno ha ancora effettuato scelte strategiche, ogni giocatore, a turno, decide a quale partito afferire conoscendo le scelte già effettuate dai suoi predecessori. Il primo giocatore potrà, quindi, scegliere indifferentemente uno dei due schieramenti e supponiamo opti per quello di destra; il secondo giocatore, nel caso in cui $c_{12} > 0$ sceglierà il partito di sinistra; il terzo giocatore sceglierà di andare a sinistra se $c_{23} < c_{13}$, e così via. In generale, ogni giocatore $i \in [n]$ sceglierà la strategia che costituisce una contromossa migliore nel profilo strategico ristretto alle scelte effettuate dai primi $i-1$ giocatori (giocatore miope). Il prezzo dell'anarchia delle soluzioni così generate è pari a 2.

Un limite intrinseco dei giocatori miopi è che ognuno di loro decide di effettuare la scelta strategica in grado di garantirgli il minor costo possibile nell'immediato, senza ponderare il fatto che la sua scelta potrebbe essere fortemente condizionata da quelle effettuate dai suoi successori. In quest'ottica, si possono prendere in considerazione giocatori **lungimiranti** che valutino tutte le possibili situazioni che si possono creare a seguito della propria scelta strategica e, sulla base di una tale analisi esaustiva, scelgano la loro contromossa migliore.

È stato dimostrato in [8] che il prezzo dell'anarchia relativo alle soluzioni generate da giocatori lungimiranti sale a 3, mostrando, quindi, come il benessere sociale diminuisca all'aumentare del livello di razionalità dei giocatori.

Conclusioni

Dall'analisi di alcuni risultati teorici relativi al prezzo dell'anarchia in tre giochi non cooperativi di rilevante applicazione pratica, è possibile concludere che nella società del terzo millennio, in cui il faro guida dell'umanità è la ricerca spasmodica del benessere personale e collettivo, trovi piena esaltazione l'*homo oeconomicus*: l'evoluzione egoista, ignorante e miope dell'homo sapiens. Ma non biasimiamoci: non è colpa nostra, ma soltanto della mano invisibile teorizzata da Adam Smith. Una mano invisibile che, nell'indicarci la strada che porta a una fantomatica ricchezza di massa, ci spinge inesorabilmente verso il baratro della decadenza sociale.

[1] J. F. Nash: "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, **54(2)** (1951) 286–295.

[2] J. F. Nash: "Equilibrium Points in n-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36** (1950) 48–49.

[3] E. Koutsoupias, C. Papadimitriou: "Worst-case Equilibria", *Proceedings of the 16th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, **LNCS 1653** (1999) 404–413.

[4] R. W. Rosenthal: "A Class of Games Possessing Pure-Strategy Nash Equilibria", *International Journal of Game Theory*, **2** (1973) 65–67.

[5] G. Christodoulou, E. Koutsoupias: "The Price of Anarchy of Finite Congestion Games", *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, (2005) 67–73.

[6] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos, M. Kyropoulou, E. Papaioannou: "The Impact of Altruism on the Efficiency of Atomic Congestion Games", *Proceedings of the 5th International Symposium on Trustworthly Global Computing (TGC)*, **LNCS 6084** (2010) 172–188.

[7] V. Bilò, A. Fanelli, M. Flammini, L. Moscardelli: "When Ignorance Helps: Graphical Multicast Cost Sharing Games", *Theoretical Computer Science*, **411(3)** (2010) 660–671.

[8] V. Bilò, M. Flammini, G. Monaco, L. Moscardelli: "Some Anomalies of Farsighted Strategic Behavior", *Proceedings of the 10th Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA)*, **LNCS 7846** (2012) 229–241.

Vittorio Bilò: è un ricercatore in informatica presso l'Università del Salento. I suoi interessi di ricerca spaziano nell'ambito della Teoria degli Algoritmi e della Complessità Computazionale, con particolare riferimento alla Teoria dei Giochi Algoritmica.